BUKTI YANG MEMBUKTIKAN DAN BUKTI YANG MENJELASKAN DALAM KURIKULUM MATEMATIKA SEKOLAH

Deni Hamdani[1*], Junaidi[2], Dwi Novitasari[3], Nilza Humaira Salsabila[4] & Ratna Yulis Tyaningsih[5]

[1,2,3,4,5]*Pendidikan Matematika, Universitas Mataram, Kota Mataram, Indonesia;*

**deni.math@unram.ac.id*

Informasi Artikel:

Article history
Received: February 22th, 2020
Revised: March 20th, 2020
Accepted: May 18th, 2020

Keywords:
Proofs that explain, and Proofs that prove.

ABSTRAK

Bukti adalah suatu argumen logis yang diberikan sesuai dengan aturan sistem deduktif, dan digunakan sebagai pembenaran kebenaran pernyataan suatu teorema, serta bagian fundamental dari proses berpikir matematis. Sebuah bukti mungkin kurang meyakinkan ketika hanya terbukti valid berdasarkan bentuknya saja, tanpa memperhatikan isinya. Seringkali sebuah ide baru matematika diterima, lebih penting dari apa yang dibuktikan, bukan kebenaran dari bukti yang lebih berbobot. Bukti dinilai penting untuk memunculkan hubungan matematika daripada hanya untuk menunjukkan kebenaran hasil. Dan akan bermanfaat untuk memperkenalkan suatu perbedaan eksplisit antara "bukti yang membuktikan" dan "bukti yang menjelaskan." Keduanya adalah bukti yang sah, dan terdiri dari pernyataan yang merupakan aksioma sendiri atau mengikuti pernyataan sebelumnya sebagai hasil dari penerapan aturan inferensi yang benar. Untuk menggambarkan perbedaan antara keduanya dalam makalah akan menggunakan konsep barisan bilangan segitiga. Hasil kajian yang diperoleh adalah pentingnya menguraikan konsep bukti yang menjelaskan, dan kemudian mempertimbangkan implikasinya untuk penanganan pembuktian dalam kurikulum, serta menyarankan bahwa bila memungkinkan perlunya menyajikan kepada mahasiswa tidak hanya "bukti yang membuktikan", melainkan juga "bukti yang menjelaskan." Sehingga nantinya mahasiswa menjadi sadar akan kompleksitas masalah dan perlunya menghasilkan argumen yang valid.

Kata Kunci: Bukti yang Menjelaskan, dan Bukti yang Membuktikan.

ABSTRACT

Proof is a logical argument given in accordance with the rules of a deductive system, and is used as a justification for the truth of a theorem's statement, as well as a fundamental part of the mathematical thinking process. A proof may be less convincing when it is only proven to be valid based on its form, regardless of its contents. Often a new mathematical idea is accepted, more important than what is proven, not the truth of a more weighty proof. Proof is considered important to bring up mathematical relationships rather than just to show the truth of the results. And it would be useful to introduce an explicit distinction between "Proofs that prove" and "Proofs that explain." Both are valid proofs, and consist of statements that constitute the axioms themselves or follow previous statements as a result of applying the correct rules of inference. To illustrate the difference between the two in the paper we will use the concept of triangular number sequence. The study results obtained are the importance of outlining the concepts of proofs that explain, and then consider the implications for handling evidence in the curriculum, and suggest that if possible the need to present to students is not only "Proofs that prove", but also "Proofs that explain". So that students will become aware of the complexity of the problem and the need to produce valid arguments.

Keywords: Proofs that explain, and Proofs that prove

1. PENDAHULUAN

Bukti adalah argumen logis yang diberikan sesuai dengan aturan sistem deduktif, dan sebagai pembenaran kebenaran pernyataan suatu teorema, serta merupakan bagian fundamental dari proses berpikir matematis (Kwoen,2007., Devlin, 2004., Koshy, 2007., Dumas, 2014, dan Theorem-wikipedia). Dan pernyataan matematis bukanlah suatu teorema sampai telah diturunkan dengan cermat dari aksioma, definisi, dan teorema yang sebelumnya terbukti (Bartle, 2011). Lebih lanjut, bukti adalah argument yang menyakinkan, sebagaimana dinilai oleh ahli yang kompeten. Dan, bukti adalah penjelasan lengkap yang diberikan ketika penjelasan lengkap lebih tepat daripada penjelasan tidak lengkap atau tidak ada penjelasan (Herst, 1993).

Bukti yang kuat mencerminkan praktik matematika (Hanna, 1983). Lebih lanjut Hanna (1990) mengatakan bukti mungkin kurang meyakinkan ketika hanya terbukti valid berdasarkan bentuknya saja, tanpa memperhatikan isinya. Dan ketika sebuah ide matematika baru diterima, seringkali lebih penting dari apa yang dibuktikan, dan bukan kebenaran dari pembuktian, yang lebih berbobot (Hidayati et al., 2020). Bukti harus berasal dari tempat yang spesifik dan dapat diterima, harus menyajikan argumen yang tidak cacat, dan harus mengarah pada hasil yang, bahkan tidak terduga, nampak pada refleksi untuk membuat akal dalam konteks pengetahuan matematika lainnya. Bukti dinilai penting untuk memunculkan hubungan matematika daripada hanya untuk menunjukkan kebenaran hasil (Hanna, 2000).

Dalam keinginan untuk memperhitungkan peran pembuktian sebagai alat komunikasi, dan sebagai pengakuan atas proses sosial yang memainkan bagian yang sangat penting dalam penerimaan oleh ahli matematika tentang hasil baru, pendidik lebih menekankan pada konsep bukti sebagai “argumen meyakinkan.” (Hanna, 1990). Balacheff (1988) menunjukkan pentingnya menciptakan situasi kelas di mana siswa menjadi sadar akan kompleksitas masalah dan perlunya menghasilkan argumen yang valid. Sehingga (Hanna, 1990) mengatakan akan bermanfaat untuk memperkenalkan pada diskusi ini suatu perbedaan eksplisit antara bukti yang membuktikan dan bukti yang menjelaskan.

Bukti yang menjelaskan dan bukti yang membuktikan keduanya adalah bukti yang sah. Kedua jenis bukti ini memenuhi persyaratan untuk pembuktian matematis, dan karenanya berfungsi dalam ukuran yang sama untuk menetapkan validitas pernyataan matematis. Keduanya terdiri dari pernyataan yang merupakan aksioma sendiri atau mengikuti dari pernyataan sebelumnya sebagai hasil dari penerapan aturan inferensi yang benar (M. A. Maulyda et al., 2020). Namun demikian, ada perbedaan yang sangat penting antara kedua jenis pembuktian ini. Bukti yang membuktikan hanya menunjukkan bahwa teorema itu benar; hanya memberikan alasan bukti saja. Di sisi lain, bukti yang menjelaskan, juga menunjukkan mengapa teorema itu benar; ia memberikan serangkaian alasan yang berasal dari fenomena itu sendiri (Hanna, 1990). Sebuah bukti yang menjelaskan adalah argumen yang menjelaskan, sering kali pada tingkat intuitif, mengapa hasilnya benar (Weber, 2004).

Sebuah bukti yang membuktikan mungkin bergantung pada induksi matematika atau bahkan pada pertimbangan sintaksis saja. Tetapi bukti yang menjelaskan harus memberikan alasan berdasarkan ide-ide matematika yang terlibat, sifat-sifat matematika yang menyebabkan teorema yang ditegaskan itu benar (Herst, 1993., Hanna, 1990., Hanna, 2000.,).

Kebutuhan untuk memahami dan terutama menulis bukti dalam kuliah-kuliah matematika sangatlah penting (Moras, 1987). Bahkan (NCTM, 2000) dan (Walle, 2007) mengungkapkan bahwa pembuktian bertujuan untuk membantu dalam memutuskan apakah dan mengapa jawaban kita logis, mengembangkan kebiasaan memberi argumen, dan menjadikan kegiatan menyelidiki sebagai bagian utuh dari setiap pemecahan dan merupakan proses yang dapat meningkatkan pemahaman konsep. Sementara, (Weber-Research sampler) menjelaskan bahwa tujuan dari pembuktian adalah untuk: (1) menjelaskan, (2) sistemisasi, (3) komunikasi, (4) penemuan hasil baru, (5) pertimbangan suatu definisi, (6) mengembangkan intuisi, dan (7) menyediakan otonomi.

2. METODEPENELITIAN

Makalah ini mengeksplorasi peran bukti dalam pendidikan matematika dan memberikan justifikasi atas pentingnya dalam kurikulum sekaligus membahas atau memperkenalkan dua jenis bukti, yakni bukti yang membuktikan dan bukti yang menjelaskan. Sehingga dari bahasan penelitiannya, maka dapat kita katakan bahwa penelitian ini adalah penelitian deskriptif eksploratif. Dengan kata lain penelitian ini bertujuan untuk merumuskan masalah untuk investigasi yang lebih jelas.

3. BUKTI YANG MEMBUKTIKAN DAN BUKTI YANG MENJELASKAN

Contoh berikut menggambarkan perbedaan antara bukti yang membuktikan dan bukti yang menjelaskan:

Buktikan bahwa jumlah n suku pertama bilangan segitiga, $S(n)$, adalah sama dengan $\frac{(n+2)(n+1)n}{6}$ atau

$$S(n) = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$

3.1 Bukti yang Membuktikan

Karena bukti yang membuktikan adalah bukti yang hanya menunjukkan bahwa teorema itu benar; atau dengan kata lainnya hanya memberikan alasan bukti saja (Hanna, 1990). Maka berikut ini akan dikenalkan bukti dengan induksi matematika sebagai bukti yang membuktikan.

Bukti dengan induksi matematika

Untuk $n = 1$, teorema benar

$$S(1) = \frac{(1+2)(1+1)1}{6} = 1$$

Asumsikan benar untuk suatu $n = k$, maka

$$S(n) = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{(k+1)k}{2} = \frac{(k+2)(k+1)k}{6}$$

p-ISSN 2723-3634

Karena $n = 1$ dan $n = k$ benar, maka $n = k + 1$ juga benar, sehingga:

$$S(n) = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}$$

Bukti:

$$S(n) = \underbrace{1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{(k+1)k}{2}}_{\frac{(k+2)(k+1)k}{6}} + \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)k}{6} + \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

$$S(n) = \underbrace{1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{(k+1)k}{2}}_{\frac{(k+2)(k+1)k}{6}} + \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)k}{6} + \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+2)(k+1)k}{6} + \frac{3(k+2)(k+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+2)(k+1)}{6}[k+3]$$

$$= \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}$$

Sekarang, ini tentu saja merupakan bukti yang dapat diterima. Hal ini menunjukkan bahwa pernyataan matematika itu terbukti berdasarkan metode pembuktian yakni metode induksi matematika. Induksi matematika adalah metode pembuktian yang kuat yang sering digunakan untuk menetapkan validitas pernyataan yang diberikan dalam hal bilangan asli. Meskipun kegunaannya terbatas pada konteks yang agak khusus ini, induksi matematika adalah alat yang sangat diperlukan di semua cabang matematika (Bartle, 2011). Sebaliknya, Hanna (1990) mengatakan bahwa bukti dengan induksi matematika tidak jelas pada umumnya.

Dari pernyataan Hanna ini, menerangkan atas apa yang tidak dilakukan dengan metode induksi matematika adalah menunjukkan mengapa jumlah n suku pertama bilangan segitiga adalah $\frac{(n+2)(n+1)n}{6}$ atau karakteristik sifat dari jumlah n suku pertama bilangan segitiga menguatkan tanggung jawab atas nilai $\frac{(n+2)(n+1)n}{6}$.

3.2 Bukti yang menjelaskan

Selain menunjukkan mengapa teorema itu benar, bukti yang menjelaskan juga memberikan serangkaian alasan yang berasal dari fenomena itu sendiri (Hanna, 1990). Dan sering kali pada tingkatan intuitif, mengapa hasilnya benar (Weber, 2004). Permasalahan jumlah n suku pertama bilangan segitiga di atas hampir sama dengan permasalahan Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss_Disquisitiones Arithmeticae) yang menggunakan sifat simetri untuk menunjukkan mengapa pernyataan itu benar. Sehingga berikut ini akan dikenalkan dua contoh bukti yang menjelaskan, yakni:

Bukti Gauss

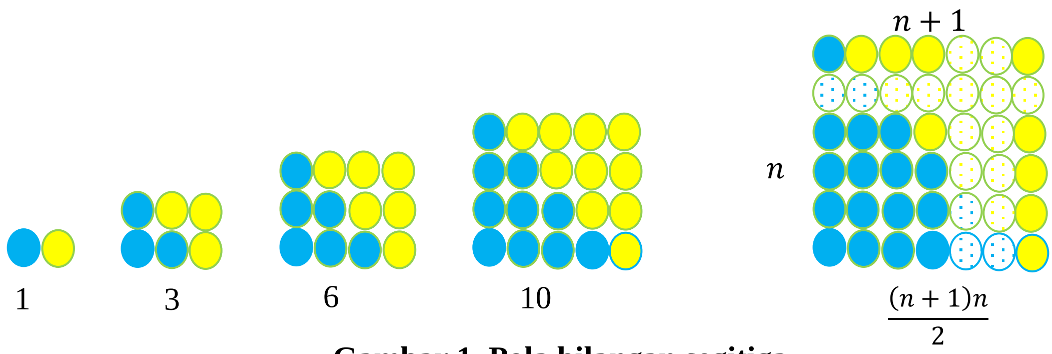
$$S(n) = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{(n+1)n}{2}$$

$$S(n) = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} + \frac{(n-2+1)(n-2)}{2} + \frac{(n-3+1)(n-3)}{2} + \cdots + 1$$

$$2S(n) = \frac{n(n+1)+2}{2} + \frac{n(n-1)+6}{2} + \frac{(n-1)(n-2)+12}{2} + \frac{(n-2)(n-3)+20}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)+2}{2}$$

$$S(n) = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$

Perlu diketahui bahwa barisan bilangan segitiga merupakan barisan aritmetika tingkat dua, sehingga jumlah jumlah n suku pertama dari barisan bilangan segitiga atau aritmetika tingkat dua sama dengan suku ke-n barisan bilangan aritmetika tingkat tiga. Selanjutnya bukti yang menjelaskan lainnya dari pernyataan yang sama ini adalah representasi geometrik dari n suku pertama bilangan segitiga dengan *bangun titik* yang sama sekali tidak sama; disini ciri khasnya adalah pola geometris yang mendorong kebenaran pernyataan itu. Kita dapat mewakili jumlah dari n suku pertama bilangan ganjil positif menggunakan pola titik-titik berikut.



Gambar 1. Pola bilangan segitiga

Titik-titik pada setiap suku membentuk sudut siku-siku yang sisi-nya sama

$$S(n) = 1 \text{ titik} + 3 \text{ titik} + 6 \text{ titik} + 10 \text{ titik} + \cdots + \frac{(k+1)k}{2} \text{ titik}$$

Dua jumlah tersebut $S(n) + S(n)$ memberikan hasil:

$$2S(n) = \frac{n(n+1)+2}{2} + \frac{n(n-1)+6}{2} + \frac{(n-1)(n-2)+12}{2} + \frac{(n-2)(n-3)+20}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)+2}{2}$$

$$S(n) = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$

Baik bukti Gauss dan representasi geometrik menunjukkan bahwa seseorang dapat mengadopsi pendekatan bukti yang menjelaskan untuk pengajaran bukti di kelas tanpa meninggalkan kriteria bukti matematika yang sah. Yang harus dilakukan seseorang adalah mengganti suatu bukti, dengan bukti lain yang sama-sama sah yang memiliki kekuatan penjelas, kekuatan untuk mengeluarkan pesan matematika dalam sebuah teorema. Bukti yang hanya mengandalkan logika matematika tidak akan pernah bisa memberikan alasan yang jelas. Bukti-bukti semacam itu hanya melihat pada bentuk argumen saja (Hanna, 1990., Hanna, 2000).

Dari perspektif ini, di kelas matematika (SMA kelas XI) kegiatan membuktikan (induksi matematika/bukti yang membuktikan) hanya dijadikan sebagai latihan dalam mengkonfirmasikan pernyataan atau menarik suatu kesimpulan dari pernyataan yang bersifat khusus (premis) ke pernyataan yang sifat umum (konklusi) yang mungkin bernilai salah ataupun benar, tapi tidak keduanya (bersifat probabilistik) (Maulyda et al., 2020). Konklusi yang ditarik secara induktif tidak selalu dapat dibuktikan secara deduktif (konjektur), atau dengan kata lain pengajaran bukti yang diajarkan di sekolah saat ini mengkomunikasikan bahwa bukti lebih kepada membangun atau menguji kebenaran dari pernyataan matematis yang diberikan.

Berbeda dengan bukti yang menjelaskan, fokus dari bukti yang menjelaskan jelas pada pemahaman, bukan pada mekanisme deduktif. Dalam pendidikan matematika kita fokus sebanyak mungkin pada penjelasan matematika, baik yang menyoroti bagaimana mahasiswa menyelesaikan permasalahan bukti dari suatu teorema tentang ide-ide matematika penting yang mengarah pada kebenarannya, ataupun bagaimana ide-ide dalam struktur kognitif dapat mengkontruksi permasalahan bukti. Peran bukti dan pembuktian dalam matematika mengarahkan kita pada kebutuhan akan pengajaran bukti di kelas-kelas matematika.

Bukti dapat menunjukkan pernyataan matematika itu benar dengan asumsi aksioma tertentu, namun matematikawan lebih melihat kepada membangun kebenaran untuk mencari wawasan *mengapa*; bukti dapat memiliki kekuatan penjelas; dan melalui proses pembuktian, dapat menemukan hasil baru (Hanna, 2000; dan Thurston, 1994). Sehingga akhirnya, bukti dapat mengkomunikasikan pengetahuan matematika dan menempatkan pengetahuan itu secara sistematis dalam suatu kerangka kerja. Rav (1999) mengusulkan bahwa bukti adalah yang paling penting dalam matematika oleh karena bukti dapat menjadi alat, metode, dan strategi untuk memecahkan masalah. Oleh karena itu, salah satu kebutuhan mengajar bukti di kelas matematika adalah untuk mendukung pemahaman siswa. Kebenaran pernyataan matematis mengikuti penalaran deduktif yang valid dari hasil yang ditetapkan dan bukti adalah deduktif (Hersh 2008, p. 100).

Bukti mengkomunikasikan pengetahuan matematika dan tempatnya dalam struktur yang terorganisir. Oleh karena itu, tujuan lain untuk mengajar bukti adalah untuk “menjelaskan” asal-usul dan hubungannya dengan pengetahuan matematika (Zaslavsky, 2012). Pengalaman siswa terhadap bukti (proof) dan pembuktian (proving) berbeda jelas dengan pengalaman matematikawan (akademisi) oleh karena tujuan mereka berbeda, yakni siswa di sekolah bahkan mahasiswa semester awal tidak terlibat dalam kegiatan pembuktian untuk menemukan hasil matematika baru (Herbst dan Brach 2006; Hilbert et al. 2008). Namun tujuannya adalah agar siswa memiliki pengalaman dalam penalaran yang mirip dengan yang dilakukan oleh matematikawan (akademisi); serta mempelajari bangunan pengetahuan matematika dan mendapatkan wawasan mengapa pernyataan itu benar. Di kelas matematika, bukti disajikan untuk mengajarkan kepada siswa proses berpikir logis dan berkomunikasi dan mungkin secara implisit memecahkan masalah sesuai dengan contoh (Herbst 2002; Herbst dan Brach 2006).

4. KESIMPULAN

Bukti yang membuktikan bergantung pada induksi matematika atau pertimbangan sintaksis saja. Sementara bukti yang menjelaskan memberikan alasan berdasarkan ide-ide matematika yang terlibat, sifat-sifat matematika yang menyebabkan teorema yang ditegaskan itu benar. Bukti yang menjelaskan lebih menekankan bahwa pemahaman matematika itu lebih penting, karena pemahaman tidak lebih dari sekadar mengonfirmasikan bahwa ada kaitan yang benar dalam rantai deduksi, melainkan pemahaman itu membutuhkan daya tarik untuk pengalaman matematika sebelumnya. Bukti yang menjelaskan sebanyak mungkin fokus pada penjelasan matematika (bagaimana menyelesaikan permasalahan bukti dari suatu teorema tentang ide-ide matematika penting yang mengarah pada kebenarannya, ataupun bagaimana ide-ide dalam struktur kognitif dapat mengkontruksi permasalahan bukti), dan terakhir perhatian utama Bukti yang menjelaskan adalah wawasan.

Maka perlu mengenalkan pada mahasiswa tentang bukti yang menjelaskan, tanpa mengabaikan bukti yang membuktikan, dengan tujuan mahasiswa menjadi sadar akan kompleksitas masalah dan perlunya menghasilkan argumen yang valid. Serta mengganti suatu bukti, dari jenis yang tidak jelas, dengan bukti lain yang sama-sama sah dan memiliki kekuatan penjelas, kekuatan untuk mengeluarkan pesan matematika dalam sebuah teorema atau pernyataan matematis. Dan terakhir tantangan bagi pengembang kurikulum matematika, adalah mengidentifikasi bukti yang menjelaskan sebagai alternatif dari banyak bukti yang tidak menjelaskan.

5. DAFTAR PUSTAKA

Balacheff. N. 1988. A study of pupils'proving processes at the junior high school level. Unpublished paper presented at the Joint International Conference 66th NCTM and UCSMP Project, Chicago.

Bartle, R G., dan Sherbert, D R. 2011. Introduction to Real Analysis, Fourth Edition. USA: John Willey & Sons, Inc.

Devlin, Keith J. 2004. *Sets, fuctions, and logic: an introduction to abstract mathematics, 3rd ed*. Boca Raton-Florida:Chapman& Hall/CRC.

Dumas, B. A., & McCarthy, J. E. 2014. *Transition to Higher Mathematics: Structure and Proof*. Saint Louis, Missouri: Washington University in St. Louis. https://doi.org/10.7936/K7Z899HJ

Hanna, G. 1983. Rigorous Proof in Mathematics Education, Toronto, OISE Press.

Hanna, G.1990. Some pedagogical aspects of proof, *Interchange* 21(1), 6–13.

Hanna, G. 2000. Proof, Explanation and Exploration: an Overview, *Educational Studies in Mathematics 44: 5–23, 2000. Kluwer Academic Publishers.Printed in the Netherlands.*

Herbst, P. 2002. Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 283–312.

Herbst, P., & Brach, C. 2006. Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction*, 24(1), 73-122.

Hersh, R. 1993. Proving is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics* 24:389-399. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Hersh, R. 2008. Mathematical practice as a scientific problem. In B. Gold & R. A. Simons (Eds.), Proof and other dilemmas: *Mathematics and philosophy* (pp. 95–108). Washington, DC: Mathematical Association of America.
Hidayati, V. R., Wulandari, N. P., Maulyda, M. A., Erfan, M., & Rosyidah, A. N. K. (2020). Literasi Matematika Calon Guru Sekolah Dasar dalam Menyelesaikan Masalah PISA Konten Shape & Space. *JPMI: Jurnal Pembelajaran Matematika Inovatif*, *3*(3), 1–10.
Hilbert, T. S., Renkl, A., Kessler, S., & Reiss, K. 2008. Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction*, 18, 54–65.
Koshy, Thomas. 2007. *Elementary number theory with applications.–2nd ed. USA*: Academic Press is an imprint of Elsevier
Kwoen, J. 2002. Philosophical perspective on proof in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16.
Maulyda, M. A., Rahmatih, A. N., Gunawan, G., Hidayati, V. R., & Erfan, M. (2020). Retroactive Thinking Interference of Grade VI Students: A Study on the Topics of PISA Literacy Lessons. *Journal of Physics: Conference Series*, *1471*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1471/1/012037
Maulyda, Mohammad Archi, Nurmawanti, I., & Khair, M. S. (2020). Deskripsi Kemampuan Koneksi Matematis Siswa Kelas X Pada Materi Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel. *SJME (Supremum Journal of Mathematics Education)*, *4*(1), 1. https://doi.org/10.35706/sjme.v4i1.2026
Morash, Ronald P.1987. *Bridge to abstract mathematics, 1st ed*. New York: Random House, Inc.
National Council of teachers of Mathematics. 2000. *Principles and standars for school mathematics*, Reston, VA: Autor.
Rav, Y. 1999. Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7, 5–41.
Research Sampler 8: Students' difficulties with proof by Keith Weber| Mathematical Association of America (t.t). https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof
Theorem. (t.t). in Wikipedia, Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Theorem diakses pukul 16.10 tanggal 10-9-2019
Van de Walle, Jhon. A. 2007. *Elementary and Middle School* Mathematics, *6th Ed*. USA: Pearson Education, Inc.
Weber, K., dan Alcock, L. 2004. Semantic and Syntactic Proof Productions.Educational Studies inMathematics 56: 209–234, 2004. Kluwer Academic Publishers.Printed in the Netherlands.
Zaslavsky, O., Nickerson, S D., Stylianides, A J., Kidron, I., dan Landman, GW. 2012. Chapter 9 The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives, Editors: Gila Hanna, dan Michael de Villiers: *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 216–229). The 19th ICMI Study, International Commission on Mathematical Instruction.